

الخميس 31 / 5 / 2019

تمارين حول الفصل الثاني :

المعادلات التفاضلية ذات
العامودات الثابتة

- المثال الأول :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = x^2 + 6x + 5$$

والطلب :

- 1- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتناسقة الناقصة
- 2- افترض حالتاً خاصاً وبنع طريقه العامود غير المعينة (دون تعيينه العامودات)
- 3- أوجد حالتاً خاصاً وبنع طريقه المؤثر التفاضلي العكسي
ما صر الحل العام

الحل : المعادلة المتناسقة الناقصة :

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

$$m^4 - 4m^3 + 8m^2 - 8m + 4 = 0$$

المعادلة المميزة لها :

$$m = 1 - \frac{(-4)}{4} = 1 + 1 \quad \text{نفرض أن } m = 1 + 1$$

$$m = 1 + 1$$

$$m^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$m^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$m^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

نفرض في المعادلة التفاضلية :

②

تحسين: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = \sinh x$$

والمطلوب:

1. أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا كانت $y = e^{mx}$ حلاً للمعادلة.

2. اقترح حلاً خاصاً وفق طريقة المعاملات غير المحددة، ونسبة هذه المعاملات.

3. أوجد الحل الخاص وفق طريقة المؤثر للتفاضلية العكسية.

الحل: المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = 0$$

المعادلة المميزة لها هي:

$$m^5 - m^4 - 2m^3 + 2m^2 + m - 1 = 0$$

عند $m = -1$: $x e^{-x}$ حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة:

هذا الحل للمعادلة يتحقق هذا الفكر مرتين للمعادلة المميزة فهو $m = -1$ نعتم المعادلة المميزة على $(m+1)^2$

$$\begin{aligned} m^5 - m^4 - 2m^3 + 2m^2 + m - 1 &= (m+1)^2 (m^3 - 3m^2 + 3m - 1) \\ &= (m+1)^2 (m-1)^3 \end{aligned}$$

$$m_1 = m_2 = -1 \quad m_3 = m_4 = m_5 = 1$$

الحل العام يكون:

$$y_h = e^{-x}(A_1 + A_2 x) + e^x(A_3 + A_4 x + A_5 x^2)$$

الحل الخاص المقترح وفق طريقة المعاملات غير المحددة
وفق القاعدة الأساسية:

③

- جذور هذه المعادلة هي :

$$m_1 = 1 + i$$

$$m_2 = 1 + i$$

$$m_3 = 1 - i$$

$$m_4 = 1 - i$$

هذه هي المعادلة عينية من أجل $m_1 = m_2$ و $m_3 = m_4$ بالتالي فإن الحل العام هو :

$$y_h = e^x [(A_1 + A_2 x) \cos x + (A_3 + A_4) \sin x]$$

ملحوظة :

بإمكاننا أن نوجد الجذور بواسطة من المعادلة :

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

والتي يكتب على الشكل : $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ ونوجد جذورها

- افتراض الحل :

$$y_p = B_1 e^x + B_2 \cos x + B_3 \sin x + B_4 x^2 + B_5 x + B_6$$

- نلاحظ أنه لا يوجد اشتراك بين y_h و y_p لذلك فإن الحل الخاص المقترح هو السابق

- إيجاد الحل الخاص بصفة طريقة المؤثر التفاضلي العكسي :
المعادلة التفاضلية المطاة تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D على الشكل :

$$(D^4 - 4D^3 + 8D^2 - 8D + 4) y = e^x + \cos x + x^2$$

$\varphi(D)$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي

$$\frac{1}{\varphi(D)}$$

فيكون الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{\varphi(D)} e^x + \frac{1}{\varphi(D)} \cos x + \frac{1}{\varphi(D)} x^2$$

لنوجد تأثير المؤثر المتفاضل العكسي على كل من الحدود السابقة كل عند حدى
فيكون y_p هو مجموع نتائج تأثير المؤثر المتفاضل عليها

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 8D - 8D + 4} e^x = \frac{1}{1 - 4 + 8 - 8 + 4} e^x = e^x$$

$$\frac{1}{(D^2 - 4D + 8D - 8D + 4)} \cos x = \frac{(-1) + 0}{(D^2 - 4D + 8D - 8D + 4)} \cos x$$

$$= \frac{1}{(-1)^2 - 4D(-1) + 8(-1) - 8D + 4} \cos x = \frac{1}{-4D - 3} \cos x$$

$$= \frac{1}{-4} \frac{1}{D + \frac{3}{4}} \cos x = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{D}{4}} \left(+ \sin x + \frac{3}{4} \cos x \right)$$

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 8D - 8D + 4} x^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - (2D - 2D^2 + D^3 - \frac{1}{4} D^4)} x^2$$

$$= \frac{1}{4} [1 + (2D - 2D^2 + D^3 - \frac{1}{4} D^4) + 4D^2]$$

$$= \frac{1}{4} x^2 + x - 1 + 2 = \frac{1}{4} x^2 + x + 1$$

بالإضافة فإن الحل الخاص أصبح على الشكل

$$y_p = e^x - \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} (x^2 + 4x + 4)$$

أكثر العام للحالة المعطاة

$$y = y_h + y_p$$

(5)

نحري: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x + \sin 2x$$

والخطوات:

- 1- إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة
- 2- افترض حلًا خاصًا ونفذ طريقة المعاملات غير المحددة (دوم نفقه تنقذ المعاملات)

- 3- أوجد الحلّ الممتص الخاص ونفذ المؤثر التفاضلي العكسي
ماضيوالحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

الحلّ: المعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة:

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$$

$$m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = 0$$

المعادلة المميزة لها:

$$m^2(m^2 - 2m + 1) + (m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$(m^2 - 2m + 1)(m^2 + 1) = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = i \quad \wedge \quad m_2 = -i$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m - 1)^2 = 0$$

$$m_3 = m_4 = 1$$

إذن الجذور هي:

$$m_1 = i \quad m_2 = -i \quad m_3 = m_4 = 1$$

الجذور العقدية مختلفة، أما الجذر الحقيقي فمكرر بالثاني
فإنّ الحل العام هو:

$$y_h = e^x(A_1 + A_2 x) + A_3 \cos x + A_4 \sin x$$

- الحل الخاص المقترح دفعت القاعدة الأساسية هو
على الشكل:

6

$$y_p = \beta_1 e^x + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \cos 2x$$

* نلاحظ بأنه يوجد اشتراك بين y_p و y_h ، نطلب هذا الاشتراك
* بمعرفة الجزء المشترك فقط بأقل قوة لـ x نطلب هذا الاشتراك

$$y_p = \beta_1 x^2 e^x + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 \cos 2x$$

- للحداد الحرة الخاصة نضع طريقة المؤثر التفاضلي العكسي

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} e^x + \frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \sin 2x$$

$$\frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} e^x = \frac{1}{(12D^2 - 12D + 4)} \frac{x^2 e^x}{D^2} = \frac{x^2}{4} e^x$$

$$\frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \sin 2x = \frac{1}{(-4)^2 - 2D(-4) + 2(-4) - 2D + 1} \sin 2x = \frac{1}{6D + 9} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{D + \frac{3}{2}} \sin 2x = \frac{1}{6} \frac{1}{4 + \frac{9}{4}} \left[-2 \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x \right]$$

$$= \frac{4}{150} \left(-2 \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x \right)$$

$$y_p = \frac{x^2}{4} e^x + \frac{4}{15} \cos 2x + \frac{1}{25} \sin 2x$$

$$y = y_h + y_p$$

* * * * *

m^4	$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$	
$-4m^3$	$-4\lambda^3 - 12\lambda^2 - 12\lambda - 4$	
$+8m^2$	$8\lambda^2 + 16\lambda + 8$	
$-8m$	$-8\lambda - 8$	
4	$+4 = 0$	

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \quad \text{المعادلة من الشكل:}$$

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4q)z - q^2 = 0 \quad \text{شكل المعادلة:}$$

$$z^3 + 4z^2 + (4 - 4)z = 0 = 0$$

$$z^3 + 4z^2 = 0$$

$$z^2(z + 4) = 0$$

$$z_1 = -4 \quad z_2 = z_3 = 0 \quad \text{هذه هي المعادلة}$$

$$2\lambda_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \Rightarrow 2\lambda_1 = 2i + 0 + 0 \Rightarrow \lambda_1 = i$$

$$m_1 = 1 + i \quad \text{فكون} \quad m = \lambda + i \quad \text{نفرض في}$$

$$2\lambda_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \Rightarrow 2\lambda_2 = 2i \Rightarrow \lambda_2 = i$$

$$m_2 = 1 + i \quad \text{فكون}$$

$$2\lambda_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = -2i \Rightarrow 2\lambda_3 = -2i$$

$$m_3 = 1 - i \quad \text{فكون} \quad \lambda_3 = -i$$

$$2\lambda_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \Rightarrow 2\lambda_4 = -2i \Rightarrow \lambda_4 = -i$$

$$m_4 = 1 - i \quad \text{فكون}$$

ملاحظة: كانت بالإمكان إيجاد الجذرين الآخرين اعتماداً على أنه إذا كان m جذر عقدي صريح للمعادلة «مرافقه» جذر أيضاً.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(8)

$$y_p = \beta_1 e^{2x} + \beta_2 e^{-x}$$

يوجد اشتراك بين y_h و y_p

نريد هذا الاشتراك بالسرعة بأقل قوة x نرى هذا الاشتراك
 e^{2x} و e^{-x} و e^{2x} و e^{-x} = $\beta_1 e^{2x} + \beta_2 e^{-x}$

الآن إلى متى الوزن المتساوي العكسي

$$y_h = \frac{1}{(D-2)(D+1)} (e^{2x} - e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(D-2)(D+1)} e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)(D+1)} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{(D-2)} e^{2x} + \frac{1}{8} \frac{1}{(D+1)} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{8} x^2 e^{2x} + \frac{1}{16} x^2 e^{-x} = \frac{x^2 e^{2x}}{16} + \frac{x^2 e^{-x}}{32}$$

$$y = y_h + y_p$$

*** ** *

slap